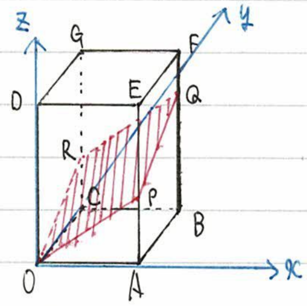
2014年　東大理系数学　第1問

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ が作る平行四辺形の面積をもとめる。$\Longrightarrow$ ベクトルの利用



$\angle AOP=\alpha$ より、$AP=\tan\alpha$　よって $\overrightarrow{OP}=(1,0,\tan\alpha)$

$\angle COR=\beta$ より　$CR=\tan\beta$　よって　$\overrightarrow{OR}=(0,1,\tan\beta)$

方針1　$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ の利用

空間内で三角形の面積をもとめる時に、よく使う

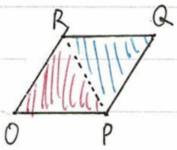
$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{1^2+0^2+\tan^2\alpha}=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$

$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{0^2+1^2+\tan^2\beta}=\sqrt{1+\tan^2\beta}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=(1,0,\tan\alpha)\cdot(0,1,\tan\beta)=\tan\alpha\times\tan\beta$

よって求める面積 S は

$S=\underbrace{2}_{2つぶん}\times\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}}_{\triangle OPR}$



$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\cdot\tan\beta)^2}$

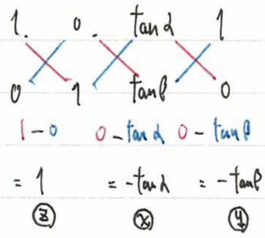
$=\cdots\cdots$

$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$ //

方針2　ベクトルの外積の利用

$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}$ をもとめると

$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}=(-\tan\alpha,-\tan\beta,1)$

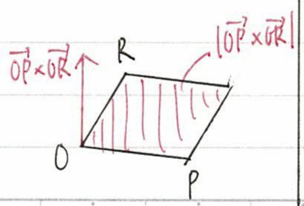


よって求める面積 S は $|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}|$ に等しいので、

$S=|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}|$

$=\sqrt{1^2+(-\tan\alpha)^2+(-\tan\beta)^2}$

$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$



(2) $S=\frac{7}{6}$ を代入

$\frac{7}{6}=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$　より　$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\frac{13}{36}$

$\begin{cases}\cdot\ \tan^2\alpha+\tan^2\beta=\frac{13}{36}\\ \cdot\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$　から　$\tan\alpha+\tan\beta$ の値がほしい。

↓

$\begin{cases}\cdot\ (\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\\ \cdot\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$　と変形すると、

$\tan\alpha+\tan\beta$ の代わりに $\tan\alpha\times\tan\beta$ でもよくなる。

$\tan\alpha+\tan\beta$ や $\tan\alpha\times\tan\beta$ が出てくる式はないか…？ → 加法定理

頭の中の動き。

$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\frac{13}{36}\Leftrightarrow(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}$ —①

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　で　$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$　より

$1=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$　—②　とすると、

①と②は　$\tan\alpha+\tan\beta$ と $\tan\alpha\tan\beta$ の連立方程式である。

あとは連立方程式を解くだけ。勝利が見えた。

$\begin{cases}a=\tan\alpha+\tan\beta\\ b=\tan\alpha\cdot\tan\beta\end{cases}$　とすると　①②は

① $\Leftrightarrow a^2-2b=\frac{13}{36}$

② $\Leftrightarrow 1-b=a$　　aをもとめたいので、bを消去。

$a^2-2(1-a)=\frac{13}{36}$

$\Leftrightarrow 36a^2+72a-85=0$

$\Leftrightarrow(6a-5)(6a+17)=0$　　$a>0$ なので、$a=\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{6}$ //

この時　$b=1-a=\frac{1}{6}$　なので、

$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は　$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$　の2解である。

$(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

$0<\alpha\leqq\beta<\frac{\pi}{2}$　で、$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので、

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$ //

東大合格 敬天塾 ©敬天塾　著作権者に無断で文章や画像等の著作物の情報を転載することは、法律で禁止されています。